PARAL·LELISME I CURVATURA EN UNA VARIETAT QUALSEVOL

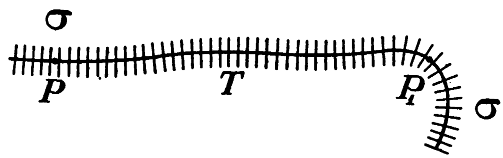
I. PARAL·LELISME SUPERFICIAL

Considerem una varietat de dues dimensions, és a dir, una superfície σ; un punt P en ella amb el seu pla tangent $\bar{\omega}$, i una direcció determinada, d'origen P i continguda en $\bar{\omega}$, és a dir, tangencial a σ. La direcció podrà venir individualitzada pel corresponent *versor* (vector unitari) u, de manera que en el successiu, en dir simplement direcció u, serà entesa la direcció quin versor és u.

Sigui P_1 un altre punt qualsevol de σ, i sigui $\bar{\omega}_1$ el pla tangent a σ en el punt P_1.

Si la superfície és *desenrotllable*, és evident que pot establir-se entre les direccions tangencials d'origen P i les direccions tangencials d'origen P_1 una correspondència per paral·lelisme, anomenant *paral·lela* a u en sentit *superficial* la u_1 que esdevé paral·lela a u en sentit ordinari en fer el desenrotllament de la superfície σ sobre d'un pla.

Aquest criteri és inaplicable al cas d'una superfície no desenrotllable (tal com l'esfera entre les més senzilles), mes sembla oportú cercar-ne una generalització convenient. S'hi arriba de la manera més senzilla afegint als elements de posició anteriors una llei de relligament,



arbitrària a priori; de tal manera, per exemple, que, suposant deduït P_1 pel seguiment PP_1 d'una corba *determinada de transport* T, i considerant la desenrotllable circumscrita σ_T a la superfície σ al llarg de T, el paral·lelisme respecte a σ al llarg de T vingui referit al paral·lelisme respecte a σ_T.

2. PRIMERES CONSEQÜÈNCIES
EQUIPOL·LÈNCIA SUPERFICIAL DE VECTORS

Una conseqüència òbvia de la definició precedent és que, al revés del que s'esdevé amb les desenrotllables, la paral·lela a u en el punt P, no ve determinada unívocament per les posicions de P i P_1, i la direcció de u, sinó que depèn, en general, de la corba de transport. És a dir que la noció de paral·lelisme així introduïda és semblant a la de treball en la qual intervé la integral d'una expressió de la forma $X_1dx_1 + X_2dx_2$; expressió en la qual x_1 i x_2 són coordenades de qualsevol classe en la superfície σ, i el qual valor, el de la integral, pres entre dos punts P i P_1 varia també, en general, en variar la línea T d'integració. Solament en el cas en què $X_1dx_1 + X_2dx_2$ sigui un diferencial exacta, el treball no depèn del camí o corba d'integració.

Tornant al paral·lelisme al llarg de T, es veu immediatament que, donades dues direccions a i b eixint del punt P, les dues direccions paral·leles eixint de P_1, i que anomenarem a_1 i b_1, formen entre si el mateix angle que a i b. Perquè, d'una banda, en el pla en el qual es desenrotlli σ_T es retroba el paral·lelisme ordinari entre a i a_1, b i b_1, i per altra és sabut que el desenrotllament no altera els angles.

En ço que s'ha vingut dient fins ara, s'és tractat sols de direccions, de versors. Mes idèntiques construccions que les indicades pel pas de u a u_1 poden aplicar-se a un vector tangencial R de llargada qualsevol R. Si és anomenat u el versor corresponent, tindrem $R = \mathrm{R}u$ i el vector paral·lel serà $R_1 = \mathrm{R}u_1$, és a dir, un vector aplicat a P_1 amb la mateixa llargada que R, mes amb la direcció de u_1. Dels dos vectors R i R_1 es dirà que són *equipol·lents* amb referència al camí T.

Aquesta noció d'equipol·lència superficial és referible al paral·lelisme, és a dir que són equipol·lents dos vectors tangencials quan són paral·lels i tenen la mateixa llargada.

El cas en què T és una geodèsica té especial interès. Del fet de ser T geodèsica respecte a σ se'n treu que també ho és per σ_T, ja que els plans osculadors de T, essent normals a σ (propietat específica de les geodèsiques), ho han de ser a σ_T, que té els mateixos plans tangents i, per tant, les mateixes normals que σ. En desenrotllar σ_T la geodèsica es transforma en una recta. Per tant, si la direcció que es transporta per paral·lelisme al llarg de T és la de T mateixa, o sia la de la seva tangent en el punt P, la direcció paral·lela serà en tot punt tangent a la geodèsica. Amb altres paraules, *la geodèsica té la propietat que els seus elements tenen direccions paral·leles* respecte del transport al llarg de la mateixa geodèsica.

Aquest enunciat és una extensió a les superfícies de qualsevol naturalesa d'aquella intuïció primordial que, referint-se a la recta, tradueix Euclides amb les paraules εὐθεῖα γραμμή ἐστίν ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ'ἑαυτῆς σημείοις κεῖται.

3. TRANSPORT INFINITESIMAL
FORMA DIFERENCIAL DE LA LLEI DE PARAL·LELISME

Sigui P_1 un punt de la superfície indefinidament prop de P. El camí PP_1 queda així reduït a l'arc elemental PP_1; arc que, salvant indefinidament petits d'ordre superior al primer, queda unívocament determinat pels extrems P i P_1. En desenrotllar, el pla $\bar{\omega}_1$ gira al voltant de la generatriu r, que és la recta d'intersecció de $\bar{\omega}$ i $\bar{\omega}_1$. És sabut que la direcció de r és la conjugada de PP_1 en el punt P o P_1 (la diferència és infinitesimal). Serà anomenat $-\omega$ el vector infinitesimal paral·lel a r que figura en direcció i sentit la rotació elemental en rebatre $\bar{\omega}_1$ sobre $\bar{\omega}$. Inversament ω és la rotació que retorna a $\bar{\omega}_1$, del pla de rebatiment $\bar{\omega}$, a la seva posició natural de tangència en el punt P_1. Sigui u una direcció qualsevol eixint de P. Per obtenir la paral·lela tangencial u_1 és traçarà la paral·lela ordinària en el pla del desenrotllament, després es portarà u_1 a la seva posició en el pla $\bar{\omega}_1$ desfent el rebatiment. És a dir, u_1 s'obté per rotació ω de u. Segons les nocions més elementals de Cinemàtica, si du és el vector diferencial entre u_1 i u, designant per $\wedge$[1] el producte vectorial, tindrem

$$du = \omega \wedge u \quad .$$

Els vectors ω i u pertanyen al pla $\bar{\omega}$, i, per tant,

1. La notació $\wedge$ per a representar el producte vectorial o extern és la de Marcolongo i Burali-Forti, avui molt estesa i usada.

du és perpendicular al dit pla, a no ésser que sigui nul.[1] Per tant, si τ és un versor de $\bar{\omega}$, el producte escalar

$$(1) \qquad \tau \times du = o \quad .$$

Aquesta expressió diu que els dos productes $\tau \times u_1$ i $\tau \times u$ difereixen sols per infinitèsims d'ordre superior al primer. Tractant-se de vectors unitaris, la igualtat dels productes $\tau \times u_1$ i $\tau \times u$ implica la dels angles, o sia la paral·lela u_1 a u forma amb una direcció qualsevol τ tangencial en P el mateix angle que u (o bé millor la diferència és d'ordre infinitesimal superior al primer).

Recíprocament, la propietat angular que s'esmenta, i amb ella la (1) és *característica*, de manera que pot donar-se com a definició (diferencial) del paral·lelisme a la superfície. Per provar-ho, observi's en primer lloc que, havent de ser zero $\tau \times du$ per a qualsevol direcció τ de $\bar{\omega}$, du serà necessàriament perpendicular al pla o bé nul. Per altra part, u_1, és a dir, $u + du$ ha de pertànyer al pla $\bar{\omega}_1$. Descomponent u en un vector paral·lel al pla $\bar{\omega}_1$ i altre vector perpendicular al pla $\bar{\omega}$, restaran ben determinades les components u_1 i du de u

$$u = u_1 - du,$$

i definit, per consegüent, el vector u_1.

1. Aquesta circumstància es presenta quan la direcció de u i la de ω coincideixen. La direcció de ω és, com ja hem dit, la conjugada de PP_1. En tal cas, i sols en tal cas, la paral·lela superficial coincideix amb la paral·lela euclídia. Aquesta observació es deu al Prof. Bompiani qui n'ha tret partit, en un cert treball en premsa, per a generalitzar la teoria dels sistemes conjugats en les superfícies pertanyent a espais no euclidis.

4. DESPLAÇAMENTS VIRTUALS. EQUACIÓ SIMBÒLICA

Es pot donar a l'expressió (1) una forma diversa introduint en lloc del versor τ un desplaçament virtual respecte de la superfície σ, és a dir, un δP qualsevol, infinitèsim, dirigit tangencialment i eixint de P. Un valor tal com δP és sempre representable en la forma $\varepsilon\tau$, designant per ε l'amplitud. Bastarà multiplicar (1) per ε i s'obtindrà

$$(1') \qquad du \times \delta P = 0,$$

que recorda el principi dels treballs virtuals.

I, així com aquest compendia la definició d'acceleració (increment de velocitat), en el pas d'un instant a l'indefinidament veí, la (1'), més senzilla encara, compendia la variació del versor u en l'espai quan aquesta direcció ve transportada de P a P_1 per paral·lelisme superficial, essent P_1 indifinidament prop de P.

Introduint un sistema de coordenades cartesianes $Oy_1y_2y_3$, i anomenant α_ν ($\nu = 1, 2, 3$) els cossinus directors de u, i δy_ν a les components d'un desplaçament virtual δP, la (1') pot venir subtituïda per la relació escalar equivalent

$$(2) \qquad \sum_{1}^{3}{}_{\nu}\, d\alpha^\nu \delta y^\nu = 0,$$

amb la qual es poden considerar definits els increments dels cossinus α_ν.

Per al d'un transport finit al llarg d'una corba T, de la qual s representi l'arc, els cossinus α_ν de la direcció u podran ser considerats com a funcions de s, i les derivades $\dfrac{d\alpha_\nu}{ds} = \alpha'_\nu$ tindran en tot punt de T valors definits per l'equació simbòlica

$$(2') \qquad \sum_{1}^{3}{}_\nu \alpha'_\nu \delta y_\nu = o$$

equivalent a la (1), o si es vol a la construcció geomètrica indicada a propòsit de la desenrotllable σ_T.

5. CARÀCTER INTRÍNSEC DE LA NOCIÓ DE PARAL·LELISME

Si la corba de transport T és una geodèsica, el paral·lelisme depèn tan solament de la superfície σ per la naturalesa de l'element lineal ds^2, mes no per la configuració de la superfície en l'espai, com podria deixar entendre la construcció geomètrica que fa ús d'aquest espai, o la fórmula (2) referida també al dit espai.

Per provar-ho, recordi's la propietat general de la conservació dels angles, així com la propietat especial de les geodèsiques que conserven la direcció pròpia, de la qual cosa es dedueix que la paral·lel u_1 en el punt P_1 a una direcció donada u eixida de P, pot considerar-se determinada per la doble condició de pertànyer a σ i de formar amb la geodèsica en el punt P_1 el mateix angle que u forma amb la geodèsica en el punt P I aquestes propietats angulars depenen tan sols de la mètrica de σ.

Pot estendre's al cas general la consideració anterior relativa a una geodèsica imaginant dividida la corba de transport de P a P_1 en una sèrie de transports elementals, en cada un dels quals l'alteració elemental que sofreix la direcció de u ve definida per la posició dels extrems de l'element d'arc, sense que influeixin els elements veïns.

I com que per a un arc geodèsic, l'alteració és intrínseca, és a dir, depèn tan solament del ds^2 de la superfície σ i no de la forma d'aquesta en l'espai circumdant, l'alteració de u, i, per tant, el paral·lelisme, tenen comportament intrínsec, sigui la que es vulgui la línia de transport.

6. REPRESENTACIÓ ANALÍTICA

És convenient procedir a un tractament sistemàtic del paral·lelisme imaginant introduïdes en la superfície σ coordenades curvilínies qualsevols x_1, x_2 i transformant (2) per a donar-li altra expressió adequada.

Les coordenades cartesianes y_ν dels punts de σ són funcions ben determinades de x_1 i x_2, i la superfície vindrà definida per

$$(3) \qquad y_\nu = y_\nu(x_1\,, x_2) \qquad\qquad (\nu = 1, 2, 3) \quad .$$

El quadrat de l'element lineal, és a dir, de la distància de dos punts indefinidament pròxims en la superfície i corresponents als valors x_i i $x_i + dx_i$ $(i = 1, 2)$, val

$$(4) \qquad ds^2 = \sum_{1}^{3}{}_{\nu}\, dy_\nu^2 = \sum_{1}^{2}{}_{ik}\, a_{ik} dx_i dx_k \quad .$$

En tot punt regular de la superfície, les a_{ik} són funcions regulars de les coordenades, és a dir, finites, contínues i derivables quantes vegades es vulgui; la forma diferencial quadràtica és definida i positiva, etc.

Sigui un punt P de σ de coordenades curvilínies x_1 x_2 i coordenades cartesianes y_1 y_2 y_3 funcions de les primeres donades per (3). Una direcció superficial u eixida de P és caracteritzada pels increments infinitesimals dx_1 dx_2 en passar de P a un punt indefinidament pròxim en la superfície σ movent-se en la direcció de u. A tot parell de diferencials dx_1 dx_2 correspon una direcció ben determinada; mes la recíproca no és certa, perquè una direcció pot correspondre a infinits parells de dx_1 dx_2 d'amplituds proporcionals. Per fer unívoca la correspondència, s'introdueixen els anomenats *paràmetres de direcció*, és a dir,

$$u^{(1)} = \frac{dx_1}{ds} \qquad u^{(2)} = \frac{dx_2}{ds} \ .$$

Aquests paràmetres, que es redueixen als cossinus directors quan σ és plana i les x_1 x_2 són coordenades cartesianes ortogonals, estan relacionats per l'equació (4), o sia

$$(5) \qquad \sum_{ik}^{2} {}_{1} a_{ik} u^{(i)} u^{(k)} = 1 \ ,$$

que en el pla i fins en l'espai euclidi es redueix a la coneguda propietat de ser igual a 1 la suma dels quadrats dels cossinus.

La u pot interpretar-se com a direcció en l'espai circumdant; en aquesta accepció li corresponen tres cossinus directors α_ν respecte dels eixos de referència y_ν essent les α_ν les relacions $\frac{dy_\nu}{ds}$ corresponents a l'element d'arc ds en la direcció de u. Els increments dy poden expressar-se en funció dels increments dx_i diferenciant la (3). Amb la qual cosa, recordant la definició de $u^{(1)}$ i $u^{(2)}$,

$$(6) \qquad \alpha_\nu = \sum_{1}^{2} {}_{j} \frac{\partial y_\nu}{\partial x_j} u^{(j)} \ .$$

De semblant manera es podrien deduir de les (3) les expressions de les components δy_i d'un desplaçament virtual δP. Un tal desplaçament en la superfície σ s'obtindrà atribuint a x_1 i x_2 increments infinitèsims virtuals, és a dir, arbitraris δx_1, δx_2. Pels quals, les coordenades cartesianes y_ν tindran a llur torn els increments

$$(6') \qquad \delta y_\nu = \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial y_\nu}{\delta x_k} \partial x_k .$$

Anem a procedir ara com en la definició de les equacions clàssiques de Lagrange partint del principi de les velocitats virtuals. Les valors (6) i (6') seran substituïdes en la fórmula (2), i anul·lats els coeficients de les arbitràries δx_k. És a dir,

$$\sum_{\nu=1}^{3} d\alpha_\nu \delta y_\nu = \sum_{k=1}^{2} \delta x_k \sum_{j=1}^{2} \sum_{\nu=1}^{3} \frac{\partial y_\nu}{\partial x_k} d\left(\frac{\partial y_\nu}{\partial x_j} u^{(j)}\right) = o$$

i, per tant,

$$\sum_{j=1}^{2} \sum_{\nu=1}^{3} \frac{\partial y_\nu}{\partial x_k} d\left(\frac{\partial y_\nu}{\partial x_j} u^{(j)}\right) = o \qquad (k = 1 , 2).$$

Aquestes equacions defineixen les valors de $du^{(1)}$, $du^{(2)}$, és a dir, dels increments que experimenten els paràmetres d'una direcció u quan és transportada per paral·lelisme al llarg del camí elemental dx_1, dx_2. Hi figuren les expressions paramètriques de les coordenades cartesianes y_ν $(x_1\ x_2)$, de manera que no se'n dedueix, sense altra transformació, llur caràcter necessàriament intrínsec. Mes és fàcil donar-los forma adequada, és a dir, tal que no hi figurin altres elements fora dels que intervenen en l'expressió del ds^2.

Recordant, a l'efecte, l'expressió dels coeficients a_{ik} que resulta de (4)

$$a_{ik} = a_{ki} = \sum_{1}^{3}{}_{\nu} \frac{\partial y_\nu}{\partial x_i} \frac{\partial y_\nu}{\partial x_k} ,$$

i introduint els símbols de Christoffel de primera espècie

$$a_{jl,k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{kl}}{\partial x_j} + \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_l} - \frac{\partial a_{jl}}{\partial x_k}\right) ,$$

resulta

$$a_{jl,k} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_j}\sum_{1}^{3}{}_{\nu}\frac{\partial y_\nu}{\partial x_k}\frac{\partial y_\nu}{\partial x_l} + \frac{\partial}{\partial x_l}\sum_{1}^{3}{}_{\nu}\frac{\partial y_\nu}{\partial x_j}\frac{\partial y_\nu}{\partial x_k} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial x_k}\sum_{1}^{3}{}_{\nu}\frac{\partial y_\nu}{\partial x_j}\frac{\partial y_\nu}{\partial x_l}\right\} = \sum_{1}^{3}{}_{\nu}\frac{\partial^2 y_\nu}{\partial x_l \partial x_j}\frac{\partial y_\nu}{\partial x_k}$$

i, per tant,

$$\sum_{1}^{3}{}_{l}\, a_{jl,k} dx_l = \sum_{1}^{3}{}_{\nu} \frac{\partial y_\nu}{\partial x_k}\, d\, \frac{\partial y_\nu}{\partial x_j} .$$

En virtut d'aquesta identitat i de la definició de a_{kj}, les dues equacions definidores del paral·lelisme esdevenen

$$\sum_{1}^{2}{}_{j}\, a_{kj} du^{(j)} + \sum_{1}^{2}{}_{jl}\, a_{jl,k}\, u^{(j)} dx_l = 0 \qquad (k = 1, 2) ,$$

en la qual ja no hi ha rastre d'elements estranys a la mètrica superficial.

Convé, encara, que apareguin resoltes respecte de les $du^{(j)}$, per a la qual cosa es multiplicaran ordenadament per $a^{(ki)}$ (1) i els resultats es sumaran ordenadament respecte

1. Les $a^{(ik)}$ són els coeficients de la forma quadràtica recíproca de $\sum_{1}^{2}{}_{ik}\, a_{ik}\, dx_i\, dx_k$. Una d'elles, vg. $a^{(ik)}$, és el complement algèbric de a_{ik} en el determinant a d'aquestes quantitats, després de dividir-ne el valor pel d'aquest determinant.

l'índex k. Com que, per una propietat elemental dels determinants,

$$\sum_{1}^{2}{}_k\, a_{kj}a^{(ki)} = \varepsilon_{ij} \qquad (\varepsilon_{ij} = 0 \text{ per } i \neq j\,,\ \varepsilon_{ii} = 1)\,,$$

resulten, introduint el símbol de segona espècie de Christoffel

$$\left\{ {jl \atop i} \right\} = \sum_{1}^{2}{}_k\, a^{(ki)} a_{jl,\,k}\,.$$

les fórmules següents:

$$(7) \qquad du^{(i)} + \sum_{1}^{2}{}_{jl} \left\{ {jl \atop i} \right\} u^{(j)} dx_l = 0 \qquad (i = 1\,, 2)\,,$$

que assenyalarem com a formes definitives de les *equacions diferencials del paral·lelisme*. En aquestes equacions, $u^{(1)}$ i $u^{(2)}$ són els paràmetres de la direcció que es transporta, dx_1, dx_2 defineixen el transport, i els símbols $\left\{ {jl \atop i} \right\}$, que són funcions de la posició del punt, depenen de la mètrica en la varietat en què s'opera.

Dels diferencials pot passar-se tot seguit a les derivades, suposant que el camí dx_1, dx_2 pertanyi a una corba determinada T. Siguin

$$x_i = x_i(s) \qquad (i = 1\,, 2)$$

les equacions paramètriques de la corba, en les quals s és l'arc comptat a partir d'un origen arbitrari. Per a un transport elemental ds al llarg de T,

$$dx_i = x_i' ds\,,$$

afecten amb un índex les lletres que figuren derivades respecte a s. Les equacions (7) dividides per ds donen

$$(7') \quad \frac{du^{(i)}}{ds} + \sum_{jl}^{2} \left\{ {jl \atop i} \right\} u^{(j)} x'_l = 0 \qquad (i = 1, 2).$$

Al llarg de T, les x i els $\left\{ {jl \atop i} \right\}$, així com les x', són funcions conegudes de la variable s. El sistema (7') és, doncs, un sistema d'equacions diferencials lineals a què han de satisfer les funcions incògnites $u^{(i)}(s)$. Aplicant ara els teoremes d'existència venim a retrobar analíticament ço que geomètricament és cosa d'evidència, és a dir, que, donada una direcció arbitrària en la varietat considerada eixint d'un punt P de T, les direccions paral·leles en tot altre punt de la corba són ja determinades.

7. TRANSPORT PER EQUIPOL·LÈNCIA. COMMUTABILITAT.

Ja s'ha advertit al núm. 2 com l'operació geomètrica del transport per paral·lelisme superficial pot aplicar-se tant a les direccions o vectors unitaris com als vectors tangencials de llargada qualsevol. És natural que per al procés analític sigui vàlid a la mateixa extensió, ja que un vector R tangent a σ és caracteritzat en direcció i llargada en la mètrica de la varietat per dos elements $R^{(i)}$ (sistema contravariant), elements proporcionals als paràmetres $u^{(i)}$ de la seva direcció, amb la constant de proporcionalitat igual a la seva amplitud R :

$$R^{(i)} = Ru^{(i)} \qquad (i = 1, 2),$$

i, així,

$$\sum_{ik}^{2} a_{ik} R^{(i)} R^{(k)} = R^2.$$

És convenient observar que aquests vectors tangencials caracteritzats intrínsecament pels dos números $R^{(1)}$, $R^{(2)}$ provenen de la imatge geomètrica d'un segment disposat tangencialment a partir d'un punt de la superfície σ, encara que el vector no estigui tot ell contingut a la superfície, almenys en general. Si es tractés de vectors infinitesimals, l'element del pla tangent al qual pertanyerien es confon aleshores amb l'element superficial de σ al voltant de P, i aleshores si que es pot dir que no surt de σ. Un vector tangencial infinitèsim és, doncs, com un desplaçament dins de σ. En tal cas, la llargada R es redueix a la d'un element lineal, i les $R^{(i)} = u^{(i)}\, ds$ poden identificar-se als increments dx_i de les coordenades curvilínies en passar de P a P_1.

Sigui un vector tangencial de qualsevol llargada (finita o infinitèsima). Les equacions (7) en les quals es substitueixen materialment les $R^{(i)}$ a les $u^{(i)}$, és a dir,

$$(8) \qquad dR^{(i)} + \sum_{1}^{2}{}_{jl} \left\{ {jl \atop i} \right\} R^{(j)} dx_l = 0 \qquad (i = 1\,, 2)\,,$$

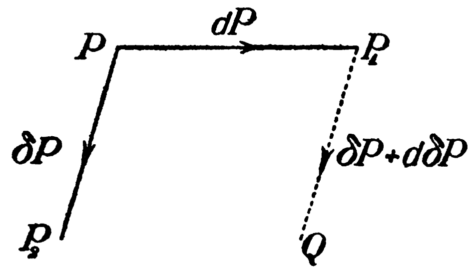
defineixen un transport per equipol·lència, perquè la direcció del vector canvia segons la llei del paral·lelisme, mentre la llargada roman la mateixa.[1]

Establert això, siguin dos sistemes de diferencials dx_i, δx_i i els vectors infinitesimals corresponents (definits en σ) $dP = PP_1$, $\delta P = PP_2$.

Sigui df l'augment d'un vector f o element subordinat a ell, quan es passa de P a P_1 per equipol·lència superficial. Atribuirem significat per l'estil a δP respecte al pas de P a P_2. De la mateixa manera $d\delta P$ serà l'in-

1. Per a la verificació vegeu el paràgraf 6 de la meva memòria *Nozione di parallelismo in una varietà qualunque, etc.*, «Rendiconti del circolo mat. de Palermo», t. XLII, 1917, pàgs. 1-32.

crement de δP pel transport de P a P_1 i $d\delta x_i$ l'increment subordinat en el seu sistema contravariant δx_i. Per a



aquest últim la (8) dóna

$$d\delta x_i = -\sum_{1}^{2}{}_{jl} \left\{ {jl \atop i} \right\} \delta x_j dx_l \qquad (i = 1, 2). \tag{9}$$

El transport de dP desde P a P_2 donarà lloc a l'increment δdP, i de manera semblant

$$\delta dx_i = -\sum_{1}^{2}{}_{jl} \left\{ {jl \atop i} \right\} dx_j \delta x_l$$

Com que els símbols de Christoffel són simètrics respecte als índexs superiors, és a dir $\left\{ {jl \atop i} \right\} = \left\{ {lj \atop i} \right\}$, canviant materialment j per l en una de les sumes, resulta

$$d\delta x_i = \delta dx_i \ ,$$

és a dir, *la llei de commutació dels operadors* d *i* δ.

Geomètricament, el resultat és suceptible d'interpretació senzilla. Per a vectors infinitesimals, els elements del sistema contravariant són diferències de coordenades homòlogues. Per tant, si x_i són les coordenades de P, el punt P_1 tindrà per coordenades $x_i + dx_i$; el punt P_2,

$x_i + \delta x_i$. Si és Q el punt de σ, al qual s'arriba eixint de P_1 el vector equipol·lent a δP, com que el sistema contravariant d'aquest últim és $\delta x_i + d\delta x_i$, les coordenades curvilínies de Q seran

$$x_i + dx_i + \delta x_i + d\delta x_i \qquad (i = 1, 2) ,$$

expressions que no alteren en canviar d per δ, de manera que s'arriba al mateix punt Q, eixint de P_2 el vector equipol·lent a dP. Pot dir-se de manera més expressiva, que, *per a vectors infinitesimals equipol·lents en la superfície, val la regla del paral·lelogram.*[1]

Observació. — En ço que precedeix es tenen en compte quantitats de segon ordre del tipus $d\delta x_i$, però es desprecien $(dx_i)^2$, $(\delta x_i)^2$. Si es vol tenir-ne en compte considerant els vectors δP, dP, com a vectors en l'espai, en traçar els equipol·lents superficials per a P_1 i per a P_2, ja no resulta un paral·lelogram, ni tan sols un quadrilàter tancat. Recordant, en efecte, la construcció en l'espai de vectors equipol·lents superficialment (construcció indicada en el núm. 3), es treu la conseqüència que $d\delta P$ i δdP, si bé tenen comú la direcció de la normal a la superfície σ en el punt P, llurs llargades seran, en general, diferents, ja que els tres punts P, P_1, P_2 i els plans tangents respectius $\bar{\omega}$, $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$ no tenen *a priori* altra relació que la de ser indefinidament propers els uns dels altres.

1. Es pot partir d'aquesta propietat per a establir intrínsecament el paral·lelisme respecte de la mètrica de σ, prescindint de l'espai circumdant. El mateix mètode s'aplica a les varietats V_n de n dimensions. Cf. H. Weyl : *Gravitation und Elektrizität, Sitzungsberichte der Preuss. Ak. der Wiss.*, 1918, pàgs. 465-480.

8. SOBRE LA VARIETAT D'UN NOMBRE QUALSEVOL DE DIMENSIONS

Sigui V_n una varietat abstracta de n dimensions corresponent al continu numèric $(x_1, x_2, \ldots.., x_n)$, o més precisament a un camp qualsevol d'aquest continu, al qual vénen referides les consideracions que segueixen.

Imaginem en V_n una determinació mètrica donada per la distància ds entre dos punts x_i i $x_i + dx_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ indefinidament veïns, la qual tingui la forma

$$ds^2 = \sum_1^n {}_{ik} a_{ik} dx_i dx_k ,$$

en què les a_{ik} són funcions de les coordenades x en V_n; funcions finites i contínues, junt amb llurs derivades primera i segona, i tals que la forma quadràtica sigui definida i positiva.

La varietat V_n pot suposar-se sempre col·locada en un espai euclidi, circumdant d'un nombre de dimensions prou alt N (no superior a $\frac{n(n+1)}{2}$). És a dir, que és possible (i en general ho és d'infinites maneres) introduir N funcions de les x_i.

$$y_\nu = y_\nu\,(x_1\,, x_2\,, \ldots, x_n) \qquad (\nu = 1\,, 2\,, \ldots\,, N)$$

tal que resulti idènticament

$$(10)\qquad ds^2 = \sum_{1}^{N}{}_{\nu} dy_\nu^2 = \sum_{1}^{n}{}_{ik} a_{ik} dx_i dx_k \,.$$

Les N quantitats y_ν poden ser mirades com a coordenades en un espai S_N de N dimensions; i fins com a coordenades cartesianes del dit espai amb una mètrica euclídia per ser

$$ds^2 = \sum_{1}^{N}{}_{\nu} dy_\nu^2 \,.$$

Dintre S_N, considerem una varietat de n dimensions que vingui definida per les equacions paramètriques

$$(11)\qquad y_\nu = y_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N) \,.$$

Segons la (10), se li fa correspondre precisament la mètrica V_n, i la varietat (11) [o una qualsevol de les (11) si hi ha diverses maneres d'escollir les N funcions y_ν] podrà considerar-se un model tangible de la V_n si és que pot anomenar-se tangible un espai de més de tres dimensions. Per a $n = 2$, $N = 3$ és el cas d'una varietat de dues dimensions en un espai euclidi i el model tangible de V_2 amb mètrica determinada seria una superfície σ convenient en l'espai ordinari. Tot ço que s'ha establert en els capítols anteriors sobre paral·lelisme en σ podria considerar-se estès a V_n.

Mitjançant (11) i (10) és fàcil estendre la noció de paral·lelisme a V_n substituint a 2 el número n i a 3 el número N.

Establert l'anterior, recordarem encara les generalitats següents : tot sistema de diferencials dx_i atribuït a una determinada ènnupla de valors de x_i, fixa una direcció u eixida del punt P, que representa l'ènnupla o sistema de n valors x_i. Si P_1 és el punt $x_i + dx_i$ i ds és l'element lineal PP_1, els nous paràmetres de direcció seran

$$u^{(i)} = \frac{dx_i}{ds} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Aquests paràmetres, en virtut de la (10), estan lligats per la relació quadràtica

$$(12) \qquad \sum_{ik}^{n} a_{ik} u^{(i)} u^{(k)} = 1,$$

anàloga a la (5). Una direcció determina els seus paràmetres (en canvi no determina les diferencials dx_i) i recíprocament, en la hipòtesi que sigui vàlida la (12).

Donats els dx_i, es coneixeran les valors de

$$(13) \qquad dy_\nu = \sum_{i}^{n} \frac{\partial y_\nu}{\partial x_i} dx_i \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N),$$

i les dy_ν així definides marquen una direcció en l'espai euclidi S_N. Dita direcció serà indicada per u, símbol que a la vegada considerem que representa el versor corresponent. Les seves components són els cossinus directors, o sia les relacions $\frac{dy_\nu}{ds} = \alpha_\nu$ (paràmetres respecte a S_N) de (13). Canviant i en j, resulta

$$(14) \qquad \alpha_\nu = \sum_{j}^{n} \frac{\partial y_\nu}{\partial x_j} u^{(j)}.$$

De les (13) mateixes, canviant d en δ, j en k, és té

$$(15) \qquad \delta y_\nu = \sum_{k}^{n} \frac{\partial y_\nu}{\partial x_k} \delta x_k.$$

Amb això es tenen tots els elements per a definir per analogia el transport P.V_n d'una direcció u, des de P a un punt indefinidament pròxim P_1 per paral·lelisme relatiu a V_n, que aquest és el significat que atribuirem a P.V_n.

9. EXTENSIÓ DEL CONCEPTE DE PARAL·LELISME FÓRMULES I PROPIETATS CONSEGÜENTS

Per definir el paral·lelisme relatiu a una V_2, és a dir, a una superfície σ en l'espai ordinari, s'ha recorregut a la desenrotllable circumscrita a σ al llarg d'una línia T. Per a la V_n manca un criteri semblant, perquè els ∞^1 espais lineals (de n dimensions) que existeixen en S_N tangents a una V_n al llarg d'una línia T no fan, en general, per $(N > n + 1)$ unes varietats desenrotllables.

Mes és aplicable immediatament àdhuc a les V_n la llei diferencial del paral·lelisme expressada per la (1), és a dir (n.º 3), la següent condició geomètrica : *La paral·lela* u_1 *a* u *traçada per un punt* P_1 *infinitament proper a* P, *ha de formar* (prescindint d'infinitesimals d'ordre superior al primer) *el mateix angle que fa* u *amb qualsevol direcció tangencial* τ, (és a dir, situada en V_n) *que surti de* P.

Si $d\alpha_\nu$ són els increments desconeguts dels cossinus directors de la direcció que s'ha de transportar per P.V_n, i τ_ν són els cossinus directors d'una direcció tangencial qualsevol, la condició angular enunciada equival a

$$\sum_1^N d\alpha_\nu \tau_\nu = 0$$

Com en el número 4, les direccions τ són aquelles, i sols aquelles, compatibles amb els lligams (11). Substituint a les τ les δy_ν proporcionals, *es podrà* definir el paral·lelisme per l'equació simbòlica

$$(16) \qquad \sum_{1}^{N}{}_{\nu}\, d\alpha_\nu \delta y_\nu = o$$

vàlida per tot desplaçament virtual δy^ν compatible amb els lligams (11).

La fórmula és anàloga a la (2), que defineix el paral·lelisme superficial, n'hi ha prou amb fer variar ν de 1 a N aquí, com allí variava de 1 a 3. La mateixa analogia ofereixen les (14) i (15) en relació amb les (5) i (6), amb la diferència que els índexs varien entre 1 i n, mentre que allí variaven entre 1 i 2. Tots els altres càlculs poden obtenir-se automàticament a la manera del número 6, per a arribar a les noves equacions intrínseques del paral·lelisme que defineixen els increments $du^{(i)}$ dels paràmetres de direcció quan es passa per P.V$_n$ de P a P$_1$:

$$(\mathrm{I}) \qquad du^{(i)} + \sum_{1}^{n}{}_{jl} \left\{ {jl \atop i} \right\} u^{(j)} dx_l = o \qquad (i = 1, 2, \ldots n),$$

de forma idèntica a la (7) ja establerta per V$_2$. Naturalment, aquí els símbols de Christoffel vénen en funció de les a_{ij} que intervenen en l'expressió de ds^2 en V$_n$.

De la (I) pot passar-se sigui a l'equació diferencial d'un transport P.V$_n$ al llarg d'una corba donada T, sigui al transport per equipol·lència de vectors qualssevols (no unitaris). El sistema diferencial lineal, generalitzant de (7') és:

$$(\mathrm{I}') \qquad \frac{du^{(i)}}{ds} + \sum^{n}{}_{jl} \left\{ {jl \atop i} \right\} u^{(j)}\, x'_l = o \qquad (i = 1, 2, \ldots n),$$

sistema reductible a una forma típica anomenada a determinant hemisimètric que s'ha presentat en altres recerques de cinemàtica i dinàmica, havent estat objecte d'estudi sistemàtic de part de Eiesland,[1] Laura,[2] Darboux,[3] Vessiot.[4]

L'estudi directe del sistema (I') i del seu adjunt porta a demostrar per via analítica les propietats del paral·lelisme en una V_n que per la V_2 es dedueixen directament de la definició geomètrica : conservació dels angles relatius quan diverses direccions es transporten al llarg del mateix camí; conservació de la llargada o amplitud dels vectors; autoparal·lelisme de les geodèsiques, etc. Com a exemple comprovarem l'autoparal·lelisme referint per a la resta als capítols 5 i 6 de la memòria esmentada en el núm. 7 (pàg. 94).

Les equacions de segon ordre que defineixen totes les geodèsiques de V_n per a les quals $\delta ds = o$ són

$$x_i'' + \sum_{jl}^{n} \left\{ \begin{matrix} jl \\ i \end{matrix} \right\} x_j' x_l' = o \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

en les quals la variable independent és l'arc s. Si es comparen amb les (I') es veu tot seguit que, en fer el transport al llarg de la geodèsica, la (I') són idènticament satisfetes per

$$u^{(i)} = x_i' \; .$$

És a dir que tota geodèsica es manté paral·lela a si mateixa, o, d'altra manera, la direcció d'una geodèsica es conserva en tot punt paral·lela a la direcció inicial.

1. *American Journal of Math.*, vol. XXVIII (1906), pp. 17-42.
2. *Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino*, vol. XLII (1906-1907), pp. 1089-1108; vol. XLIII (1907-1908), pp. 358-378.
3. *Comptes Rendus*, t. CXLVIII (primer semestre 1909), pp. 16-22, 673-679, 745-754.
4. *Ibidem*, pp. 332-335.

10. TEOREMA DE SEVERI

Donats que siguin P, P_1 i u podem considerar dins V_n el full determinat per les dues direccions (que suposem diferents) PP_1 i u. Així mateix atendrem a la superfície geodèsica γ de pol P tangent al dit full. La u es pot transportar de P a P_1 per paral·lelisme en la V_n i també per paral·lelisme en la γ. Severi ha demostrat que en tots dos casos s'obté la mateixa direcció. Sense necessitat de càlcul es pot demostrar observant que la coincidència és evident en el cas d'ésser V_n euclídia, en què γ es redueix al pla de PP_1 i u. Si V_n és qualsevol podem considerar-la referida a un sistema de coordenades geodèsiques de pol P,[1] en el qual cas, per ser $\left\{ {jl \atop i} \right\}$ igual a zero, tant les equacions del paral·lelisme com les de les geodèsiques que eixin de P, es redueixen a la forma elemental que els correspon en una varietat euclídia. Ara bé : com que les paral·leles a u traçades per P_1, tant la relativa a V_n com la relativa a γ, depenen de les equacions del paral·lelisme i de les geodèsiques amb valors de $\left\{ {jl \atop i} \right\}$ en l'únic punt P, la coincidència de les dues paral·leles, evident per la V_n euclídia, és extensiva a V_n qualsevol.

1. S'entenen per tals les curvilínies $x_1, x_2, \ldots, x_n$, que en la immediata proximitat de P es comporten per a la mètrica de V_n, és a dir, per l'expressió de ds^2 com si fossin coordenades cartesianes, ço és, que els coeficients a_{ik} que els corresponen, si bé no són constants, adopten en P valors estacionaris, és a dir, tals que a P totes les derivades de $\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_l}$ i, per tant, els símbols de Christoffel s'anul·lin.

II. ALGUNES FÓRMULES

Siguin q_1 i q_2 variables (reals) independents, C un camp finit de valors d'aquelles, T el seu contorn, $f(q_1\, q_2)$ una funció finita i contínua en C incloent-hi T, i finites i contínues les seves derivades primeres. Són ben conegudes les següents fórmules de transformació, en les quals el sentit de recorregut del contorn és fixat *a priori:*

$$
(17) \quad \left\{ \begin{aligned} \int\!\!\int_{C} \frac{\partial f}{\partial q_1}\, dq_1 dq_2 &= \int_{T} f dq_2 \,, \\ \int\!\!\int_{C} \frac{\partial f}{\partial q_2}\, dq_1 dq_2 &= -\int_{T} f dq_1 \,. \end{aligned} \right.
$$

Ordinàriament, q_1 i q_2 s'interpreten com a coordenades cartesianes d'un cert pla de representació, i el sentit es fixa de tal manera que la direcció de propagació faci amb la normal interna n un sistema de dos eixos congruent amb els coordenats. Poden eliminar-se els eixos, subtituint-los un criteri local, vgr., el de pendre en son lloc dues línies $q_1 =$ constant, $q_2 =$ constant, eixides d'un punt del contorn i en el sentit en què creix en els paràmetres q_1 o q_2. Aquest conveni per a fixar el signe del contorn té l'aventatge de poder interpretar q_1, q_2 com a coordenades curvilínies no sols en el pla, sinó també sobre una superfície o varietat V_2 de mètrica qualsevol; les identitats (17) subsisteixen sempre, naturalment.

Una segona observació serà útil en referir-nos a l'element d'àrea d'una varietat de dues dimensions compresa en V_n de mètrica definida per

$$ds^2 = \sum_{1}^{n}{}_{ik} a_{ik} dx_i dx_k \, .$$

Suposem concretament que es tracta d'una superfície σ o un tros de superfície σ de V_n definida paramètricament per

$$(18) \qquad x_i = x_i (q_1 , q_2) \qquad (i = 1 , 2 , ... n) \, .$$

Si a partir d'un punt P de σ (és a dir, d'un parell de valors donats de $q_1 \, q_2$) es fa variar solament q_1 donant-li un increment dq_1, hom es desplaça sobre la línia q_2 = const. i les x_i reben increments

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_1} dq_1 \qquad (i = 1 , 2 , ... n) \, .$$

De semblant manera, variant tan sols q_2, hom es desplaça sobre la línia q_1 = const. amb increments per a les x_i:

$$\delta x_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_2} dq_2 \, .$$

Les llargades ds i δs dels dos desplaçaments són

$$ds = \rho_1 dq_1 \quad , \quad \delta s = \rho_2 dq_2 \, ,$$

en les quals

$$(19) \quad \rho_1^2 = \sum_{1}^{n}{}_{ik} a_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial q_1} \frac{\partial x_k}{\partial q_1} \; , \; \rho_2^2 = \sum_{1}^{n}{}_{ik} a_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial q_2} \frac{\partial x_k}{\partial q_2} \, .$$

A ρ_1 i ρ_2 se'ls atribuirà el signe de dq_1 i dq_2, respectivament.

Els paràmetres corresponents són

$$\xi^{(i)} = \frac{dx_i}{ds}, \quad \eta^{(i)} = \frac{\delta x_i}{\delta s}.$$

i valen

$$(20) \quad \xi^{(i)} = \frac{1}{\rho_1}\frac{\partial x_i}{\partial q_1}, \quad \eta^{(i)} = \frac{1}{\rho_2}\frac{\partial x_i}{\partial q_2} \qquad (i = 1, 2, \ldots. n)$$

En la mètrica de V_n, les dues direccions de paràmetres $\xi^{(i)}$, $\eta^{(i)}$, o, per dir més abreujadament, les dues direccions ξ, η, formen un angle δ definit per

$$\cos\delta = \sum_{1}^{n}{}_{ik} a_{ik}\xi^{(i)}\eta^{(k)} .$$

En la mètrica subordinada, en la superfície σ, la determinació de l'angle entre les dues direccions és la mateixa, i fóra fàcil transformar l'expressió de cos δ, de manera que no hi haguessin més que elements intrínsecs de la mètrica de σ. Mes ara no farem altra cosa que expressar, gràcies a la noció geomètrica, l'àrea infinitesimal $\Delta\sigma$ del quadrangle determinat per dos parells de línies coordenades $q_1 = \text{const.}$, $q_2 = \text{const.}$ i les immediatament veïnes. Aquest quadrangle és assimilable a un paral·lelogram de costats ds, δs, que formen entre si l'angle δ. L'àrea n'és $ds\,\delta s \sin\delta$, o sia

$$(21) \qquad \Delta\sigma = \rho_1\rho_2 \sin\delta \, dq_1 dq_2 .$$

12. TRANSPORT CÍCLIC D'UNA DIRECCIÓ. CAS D'UN CICLE INFINITÈSIM. DIFERÈNCIA ANGULAR. FÓRMULA DE PÉRÈS.

Schouten,[1] amb els seus mètodes vectorials, i independentment d'ell Pérès,[2] han evidenciat la importància que té, per a caracteritzar les propietats geomètriques d'una V_n, el transport d'una direcció al llarg d'un cicle tancat. Per a l'estudi de les propietats locals en un punt P, la consideració del cicle infinitesimal presenta grans aventatges. Indicaré el tractament de Pérès amb lleugeres modificacions en el desenrotllament del càlcul.

Sigui u la direcció de paràmetres $u^{(r)}$ $(r = 1, 2, \ldots. n)$ que es vol transportar al llarg d'un cicle qualsevol T que surt de P i torna a P. Designant per dx_k $(k = 1, 2, \ldots. n)$ les diferencials de les coordenades corresponents a un element dT del cicle, les $u^{(r)}$ incrementen de $du^{(r)}$ en el transport elemental P.V_n al llarg de dT. Les valors de les $du^{(r)}$ donades per la (I) podran escriure's

$$du^{(r)} = -\sum_{ik}^{n}{}_{1} \begin{Bmatrix} ik \\ r \end{Bmatrix} u^{(i)} dx_k \qquad (r = 1, 2, \ldots n).$$

Els increments totals $\Delta u^{(r)}$ relatius al cicle sencer, és a dir, les diferències $\overline{u}^{(r)} - u_P^{(r)}$ entre els valors d'arribada $\overline{u}^{(r)}$ i els de partida $u_P^{(r)}$, seran

$$(22) \qquad \Delta u^{(r)} = -\int_T \sum_{ik}^{n}{}_{1} \begin{Bmatrix} ik \\ r \end{Bmatrix} u^{(i)} dx_k \qquad (r = 1, 2, \ldots n).$$

1. *Die direkte Analysis zur neueren Relativitätstheorie, Verhandelingen der* K. *Ak. van Wet. te Amsterdam*, 1919, Decl. XII, núm. 6; cfr. en particular pp. 67-71.

2. *Le parallélisme de M. Levi-Civita et la courbure riemannienne, Rend. della R. Acc. dei Lincei*, vol. XXVII (primer semestre 1919), pp. 425-428.

Imaginem que per T passa un element superficial σ, del qual T sigui el contorn complet. La representació paramètrica d'aquesta σ vindrà expressada per (18), essent C el camp de variabilitat dels dos paràmetres q_1 i q_2 (vegeu el capítol anterior). Sobre de σ, i, per tant, en el contorn T, les (18) donen

$$(18') \qquad dx_k = \frac{\partial x_k}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial x_k}{\partial q_2} dq_2 \, .$$

Escrivint per senzillesa

$$Q_1^{(r)} = -\sum_{ik}^{n}{}_{\scriptscriptstyle 1} \left\{ {ik \atop r} \right\} u^{(i)} \frac{\partial x_k}{\partial q_1}, \quad Q_2^{(r)} = -\sum_{ik}^{n}{}_{\scriptscriptstyle 1} \left\{ {ik \atop r} \right\} u^{(i)} \frac{\partial x_k}{\partial q_2},$$

la valor de $\Delta u^{(r)}$ es pot escriure

$$(22') \quad \Delta u^{(r)} = \int_T \left(Q_1^{(r)} dq_1 + Q_2^{(r)} dq_2 \right) .$$

Les $u^{(r)}$ de les quals suposem coneguts a P els valors inicials $u_P^{(r)}$, queden definides pel transport per paral·lelisme en tot punt de T; mes en l'interior del camp C limitat per T cal examinar-ho prèviament. En general, com que les equacions de paral·lelisme no són il·limitadament integrables, els valors de les $u^{(r)}$ en un punt Q de C (deduïts per paral·lelisme a partir de $u_P^{(r)}$) depenen de Q i del camí seguit per a passar de P a Q. Mes si *el camp* C *és infinitesimal* i prescindim dels infinitament petits d'ordre segon respecte de la màxima dimensió del camp, *s'opera ja amb diferencials exactes.*

En tal cas, la diferència entre les coordenades superficials q_1 q_2 de P i les del punt Q de C poden presentar-se sota la forma dq_1 dq_2, és a dir, són infinitesimals. Per la (18′) s'esdevé el mateix amb les diferències dx_k entre les coordenades de dos punts de V_n. Resultant així per la $u^{(r)}$ en el punt Q les valors $u^{(r)}_Q$ provinents del transport elemental P.V_n a partir de P, això és, $u^{(r)} + du^{(r)}$; de tal manera que en les $du^{(r)}$ s'atribueixi a les $u^{(j)}$ el mateix que als símbols de Christoffel llur determinació en P.

Ja en aquest ordre d'aproximacions, les $u^{(j)}_Q$ són assimilables a funcions uniformes del punt Q (lineals en dq_1, dq_2) finites i contínues, així com les derivades primeres per respecte a q_1, q_2. En el cas d'un camp C infinitesimal podem, doncs, considerar les $Q_1^{(r)}$, $Q_2^{(r)}$ com a funcions finites i contínues, junt amb les derivades respecte a q_1 i q_2. Essent així les funcions $Q_1^{(r)}$ i $Q_2^{(r)}$, són aplicables les fórmules (17), i a la integral de contorn en la (22′) podrà ser substituït un integral estès al camp C

$$(22'') \quad \Delta u^{(r)} = \int\int_C dq_1 dq_2 \left[\frac{\partial Q_2^{(r)}}{\partial q_1} - \frac{\partial Q_1^{(r)}}{\partial q_2} \right].$$

En el càlcul de les derivades de Q respecte a q_1 i q_2 cal recordar que els símbols de Christoffel depenen de les q mitjançant de les x, i, per tant, per les equacions (18), mentre les derivades de les $u^{(j)}$ vénen donades per les equacions de paral·lelisme (I) referides, com s'ha vist, al punt P.

Escrivim de nou la (I)

$$du^{(i)} = -\sum_{lk}^{n} \left\{ \begin{matrix} lk \\ i \end{matrix} \right\} u^{(l)} dx_k$$

Variant solament q_1, es dedueix

$$\frac{\partial u^{(i)}}{\partial q_1} = -\sum_{lk}^{n} \left\{ \begin{matrix} lk \\ i \end{matrix} \right\} u^{(l)} \frac{\partial x_k}{\partial q_1}$$

Altre se'n trobaria semblant fent variar solament q_2. Adoptant aquestes valors per a les derivades de les $u^{(i)}$, i sobreentenent que tot ve referit a P (un cop feta la derivació), resulta

$$\frac{\partial Q_2^{(r)}}{\partial q_1} = -\sum_{1}^{n}{}_{ik} \frac{\partial}{\partial q_1} \left\{ \begin{matrix} ik \\ r \end{matrix} \right\} \cdot u^{(i)} \frac{\partial x_k}{\partial q_2} -$$

$$-\sum_{1}^{n}{}_{ik} \left\{ \begin{matrix} ik \\ r \end{matrix} \right\} \frac{\partial u^{(i)}}{\partial q_1} \frac{\partial x_k}{\partial q_2} - \sum_{1}^{n}{}_{ik} \left\{ \begin{matrix} ik \\ r \end{matrix} \right\} u^{(i)} \frac{\partial^2 x_k}{\partial q_1 \partial q_2} =$$

$$= -\sum_{1}^{n}{}_{ihk} \frac{\partial \left\{ \begin{matrix} ik \\ r \end{matrix} \right\}}{\partial x_h} \frac{\partial x_h}{\partial q_1} u^{(i)} \frac{\partial x_k}{\partial q_2} + \sum_{1}^{n}{}_{ihkl} \left\{ \begin{matrix} ik \\ r \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} lh \\ i \end{matrix} \right\} u^{(l)} \frac{\partial x_h}{\partial q_1} \frac{\partial x_k}{\partial q_2} -$$

$$-\sum_{1}^{n}{}_{ik} \left\{ \begin{matrix} ik \\ r \end{matrix} \right\} u^{(i)} \frac{\partial^2 x_k}{\partial q_1 \partial q_2},$$

o bé canviant i per l en la segona suma i traient factor comú $u^{(i)} \frac{\partial x_h}{\partial q_1} \frac{\partial x_k}{\partial q_2}$

$$\frac{\partial Q_2^{(r)}}{\partial q_1} = -\sum_{1}^{n}{}_{ihk} u^{(i)} \frac{\partial x_h}{\partial q_1} \frac{\partial x_k}{\partial q_2} \left[\frac{\partial \left\{ \begin{matrix} ik \\ r \end{matrix} \right\}}{\partial x_h} - \sum_{1}^{n}{}_{l} \left\{ \begin{matrix} ih \\ l \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} lk \\ r \end{matrix} \right\} \right] -$$

$$-\sum_{1}^{n}{}_{ik} \left\{ \begin{matrix} ik \\ r \end{matrix} \right\} u^{(i)} \frac{\partial^2 x_k}{\partial q_1 \partial q_2}.$$

Per a tenir l'expressió de $\frac{\partial Q_1^{(r)}}{\partial q_2}$ bastarà el canvi de q_1 i q_2 en el segon membre ja escrit. Convindrà també permutar, en la primera Σ, h per k, la qual cosa no altera la valor, sinó sols l'aspecte formal. En la diferència

$$\frac{\partial Q_2^{(r)}}{\partial q_1} - \frac{\partial Q_1^{(r)}}{\partial q_2}$$

s'eliminen així els últims sumands, podent treure en els primers com a factor comú

$$u^{(i)} \frac{\partial x_k}{\partial q_1} \frac{\partial x_k}{\partial q_2} .$$

Recordant ara la definició dels símbols de Riemann de segona espècie

$$\{ir, hk\} = \frac{\partial \left\{ {ih \atop r} \right\}}{\partial x_k} - \frac{\partial \left\{ {ik \atop r} \right\}}{\partial x_h} + \sum_1^n {}_l \left[\left\{ {ih \atop l} \right\} \left\{ {lk \atop r} \right\} - \left\{ {ik \atop l} \right\} \left\{ {lh \atop r} \right\} \right] .$$

resulta

$$\frac{\partial Q_2^{(r)}}{\partial q_1} - \frac{\partial Q_1^{(r)}}{\partial q_2} = \sum_1^n {}_{ihk} \{ir , hk\} u^{(i)} \frac{\partial x_k}{\partial q_1} \frac{\partial x_k}{\partial q_2} .$$

Tenint en compte que C és infinitesimal, la integral que figura en el segon membre de (22'') pot quedar reduïda a l'element únic que es troba a l'entorn de P. Com que és coneguda l'expressió de la funció sota del signe, és a dir, $\frac{\partial Q_2^{(r)}}{\partial q_1} - \frac{\partial Q_1^{(r)}}{\partial q_2}$ pel punt P, despreciant indefinidament petits d'ordre superior a l'element $dq_1 \, dq_2$, tindrem:

$$(23) \qquad \Delta u^{(r)} = dq_1 dq_2 \sum_1^n {}_{ihk} \{ir , hk\} \, u^{(i)} \frac{\partial x_k}{\partial q_1} \frac{\partial x_k}{\partial q_2} .$$

Amb els símbols de primera espècie de Riemann $a_{ij,hk}$ definits per

$$\{ir, hk\} = \sum_{1}^{n}{}_{j} a^{(rj)} a_{ij,hk} ,$$

la (23), tenint presents les (20) i (21) del número precedent, dóna:

$$(23') \qquad \Delta u^{(r)} = \frac{\Delta\sigma}{\sin\delta} \sum_{1}^{n}{}_{ijhk} a^{(rj)} a_{ij,hk} u^{(i)} \xi^{(h)} \eta^{(k)} .$$

Aquests són els increments dels paràmetres $u^{(r)}$ d'una direcció u en el transport P.V_n al llarg d'un cicle infinitesimal que comença i acaba a P.

En la (23') intervé el cicle de transport pels tres elements geomètrics que el caracteritzen, i són : les dues direccions qualssevol ξ, η que determinen el full en el qual es suposa traçat el cicle T, l'angle δ comprès entre elles, i l'àrea $\Delta\sigma$ del cicle mesurada en la mètrica de V_n.

De la (23') és dedueix tot seguit la fórmula fonamental que serveix per a establir la relació entre paral·lelisme i curvatura. Suposem una quarta direcció qualsevol v eixint de P i de paràmetres $v^{(l)}$. Sigui α l'angle entre u i v, i examinem la variació del seu cossinus quan u es transporta per paral·lelisme al llarg del cicle que es considera.

Posant, per simplificar,

$$v_r = \sum_{1}^{n}{}_{l} a_{rl} v^{(l)}$$

(en la qual expressió, v_r són els anomenats moments de la direcció v), la fórmula del cossinus de l'angle de dues direccions, establerta en el número precedent, dóna

$$\cos\alpha = \sum_{1}^{n}{}_{r}\, u^{(r)} v_r \,.$$

Considerant successivament la determinació (arbitrària) inicial i la d'arribada, i restant-les

$$\Delta \cos\alpha = \sum_{1}^{n}{}_{r}\, \Delta u^{(r)} v_r \,.$$

Introduint per a les $\Delta u^{(r)}$ les expressions (23'), i observant que $\sum_{1}^{n}{}_{r}\, a^{(ri)} v_r = v^{(i)}$, resulta la fórmula de Pérès

$$(24) \qquad \frac{\Delta \cos\alpha}{\Delta\sigma} = \frac{1}{\sin\,\delta} \sum_{1}^{n}{}_{ijhk}\, a_{ij\,,\,hk}\, u^{(i)}\, v^{(j)}\, \xi^{(h)}\, \eta^{(k)}$$

essent δ l'angle entre ξ i η.

13. RELACIONS ENTRE PARAL·LELISME I CURVATURA

De la definició dels símbols de Riemann resulta immediatament

$$\{ir\,,hk\} = -\,\{ir\,,kh\} \qquad .$$

i, per tant,

$$a_{ij,hk} = -\,a_{ij,kh}$$

De la fórmula de Pérès es poden deduir sense càlcul les relacions

$$a_{ij\,,\,hk} + a_{ih\,,\,kj} + a_{ik\,,\,jh} = 0 \;,$$

8

que, combinades amb les precedents, exhaureixen completament les propietats algèbriques dels símbols de Riemann, portant, com a conseqüència, les identitats:

$$a_{ij,hk} = a_{hk,ij} = - a_{ji,hk} \text{ [1]} \cdot$$

Sense detenir-me en aquest punt faré observar que, si les dues direccions u i v es permuten, el segon membre de (24) canvia de signe i, per tant, també $\Delta \cos \alpha$, la qual cosa, geomètricament, no és cosa d'evidència. I com a corolari, que si v i u són coincidents, $\Delta \cos \alpha = o$, ço que és evident, perquè essent $\Delta\alpha$ infinitament petit, $\Delta \cos \alpha = - \sin \alpha \, \Delta\alpha$, i la determinació α de l'angle inicial, en aquest cas és zero.

Per demostrar la importància fonamental de la (24) en relació amb la curvatura de V_n, començarem per aplicar-la al cas elemental de la superfície, $n = 2$. Els símbols de Riemann s'anul·laran o queden reduïts a l'esquema $a_{12,12}$. És sabut que, introduint el discriminant de la forma que expressa ds^2:

$$a = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

la curvatura K de Gauss per a V_2 val

$$K = \frac{a_{12,12}}{a}.$$

Per altra part, la (24), en la qual ξ, η es suposin coincident amb u, v, i, per tant, δ amb α, es redueix a

$$\frac{\Delta \cos \alpha}{\Delta \sigma} = \frac{a_{12,12}}{\text{sen}\, \alpha} \begin{vmatrix} u^{(1)} & u^{(2)} \\ v^{(1)} & v^{(2)} \end{vmatrix}^2 .$$

1. V. Ricci: *Sulla determinazione di varietà dotate di proprietà intrinseche date a priori. Nota seconda. Rend. della R. Acc. dei Lincei*, vol. XIX (segon semestre 1910), pàg. 86.

Observi's que el producte dels dos determinants

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{vmatrix} u^{(1)} & u^{(2)} \\ v^{(1)} & v^{(2)} \end{vmatrix},$$

fet per files, dóna:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

en què

$$u_i = \sum_{1}^{2}{}_k\, a_{ik}\, u^{(k)} \quad , \quad v_i = \sum_{1}^{2}{}_k\, a_{ik} v^{(k)}$$

són els moments de les direccions u, v. Multiplicant el nou determinant per

$$\begin{vmatrix} u^{(1)} & u^{(2)} \\ v^{(1)} & v^{(2)} \end{vmatrix}$$

sempre per files, i recordant que

$$\sum_{1}^{2}{}_i\, u_i u^{(i)} = 1 \,, \quad \sum_{1}^{2}{}_i\, v_i v^{(i)} = 1 \,,$$

$$\sum_{1}^{2}{}_i\, u_i\, v^{(i)} = \sum_{1}^{2}{}_i\, u^{(i)} v_i = \cos \alpha$$

es reconeix que

$$a \begin{vmatrix} u^{(1)} & u^{(2)} \\ v^{(1)} & v^{(2)} \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha \\ \cos\alpha & 1 \end{vmatrix} = 1 - \cos^2 \alpha = \operatorname{sen}^2 \alpha \,.$$

De manera que, per ser $\Delta \cos \alpha = - \operatorname{sen} \alpha \Delta\alpha$, resulta finalment

$$(25) \qquad - \frac{\Delta\alpha}{\Delta\sigma} = \frac{a_{12,12}}{a} = K \,,$$

de la qual i de l'originària definició de α (com angle $< \pi$ entre u i v) és fàcil deduir una nova interpretació de la curvatura gaussiana d'una superfície : Sobre d'una superfície qualsevol transporti's per paral·lelisme una direcció u, eixida d'un punt P, al llarg d'un cicle tancat. Sigui $\Delta\sigma$ l'àrea del cicle, $-\Delta\alpha$ l'angle entre les dues determinacions de u, de la inicial a la final en el sentit de rotació corresponent a la direcció de propagació al llarg del cicle. La curvatura K en el punt P és $-\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta\sigma}$.

Si es considera en particular com a cicle tancat un triangle geodèsic (infinitesimal) s'arriba al cèlebre teorema de Gauss sobre els triangles geodèsics i la curvatura íntegra en el cas límit d'un triangle elemental.

Sigui ara una V_n qualsevol. Fixades u i v, considerem el full que els conté i la superfície geodèsica γ de pol P tangent al dit full. Prenent ξ i η com a coincidents amb u, v, i observant que, pel teorema de Severi, al llarg del cicle infinitèsim les paral·leles a u en V_n són paral·leles també sobre γ, es reconeix que $-\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta\sigma}$ representa la curvatura K de γ en P, i la fórmula (24) dóna

$$(26)\quad K = -\frac{\Delta\alpha}{\Delta\sigma} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}\sum_{ij,\,hk}^{n}{}_{1}\, a_{ij,\,hk}\,u^{(i)}v^{(j)}u^{(h)}v^{(k)}$$

Segons la definició de Riemann, aquesta K és la curvatura de V_n segons el full u, v.

Per altra part, el paral·lelisme al llarg del cicle es pot referir directament a la V_n, i dóna sota la forma

$$-\frac{\Delta\alpha}{\Delta\sigma}$$

(respecte a la superfície geodèsica auxiliar), una interpretació expressiva de la curvatura K.

De la simetria del segon membre de (26) respecte de u, v es conclou que, si es transporta v en lloc de u al llarg del mateix cicle, la variació de l'angle és sempre $\Delta\alpha$.

Aquestes consideracions fan compendre com, des del punt de vista metodològic, convé pendre, per a amidar la curvatura corresponent a una V_n en un punt donat d'ella, i segons un full determinat, la relació:

$$-\frac{\Delta\alpha}{\Delta\sigma}.$$

La definició ordinària es dedueix després sense càlcul.

Per a ulteriors desenrotllaments em limitaré a referir al lector a la ja esmentada memòria del T. LII del Circolo Matematico di Palermo.